BAB II

MATERI PENUNJANG

Pada bab ini akan membahas tentang materi yang berkaitan dengan bab III yaitu faktor pembagi terbesar, kongruen bilangan bulat, homomorfisma modular, matriks dan operasi matriks, sistem persamaan linier, determinan, aturan Cramer dan eliminasi Gauss. Dengan mengetahui hal-hal tersebut akan membantu dalam membahas bab III. Berikut akan diberikan definisi dan teorema yang berhubungan dengan materi di atas.

2.1. Faktor Pembagi Terbesar

Pada sub bab ini akan diberikan faktor pembagi terbesar (*Greatest Common Divisor*) dan akan disebut dengan GCD.

Definisi 2.1.1

Bilangan bulat d adalah faktor pembagi terbesar dari a dan b jika memenuhi kondisi :

1. d adalah bilangan bulat positif
2. $d \mid a$ dan $d \mid b$
3. jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid d$.

Teorema 2.1.1

Diketahui a dan b adalah bilangan bulat, paling sedikit satu dari keduanya tidak sama dengan nol. Jika GCD(a, b)=d terdapat m dan n bilangan bulat sehingga $d = am + bn$.

Definisi 2.1.2

Bilangan bulat p disebut bilangan prima jika p>1 dan pembagi dari p adalah ±1 dan ±p.

Definisi 2.1.3

Suatu bilangan yang merupakan kelipatan dari m_1, m_2,..., m_n juga kelipatan dari $m_1m_2m_3...m_n$ dengan m_1, m_2,..., m_n saling relatif prima.

Definisi 2.1.4

Dua bilangan bulat a dan b adalah relatif prima jika faktor pembagi terbesarnya satu ditulis GCD(a, b)=1 atau (a, b)=1.

2.2. Kongruen Bilangan Bulat

Definisi 2.2.1

Diambil bilangan bulat positif n, n>1 serta bilangan bulat x dan y. x dikatakan kongruen modulo n ke y jika ada k∈Z sehingga x-y = kn dan ditulis sebagai $x \equiv y \pmod{n}$.

Teorema 2.2.1

Relasi kongruen modulo n adalah relasi ekuivalen pada Z.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa kongruen modulo n adalah :

(1) reflektif

(2) simmetrik

(3) transitif

diambil n>1 dan x,y dan z bilangan sebarang dalam Z(x, y, z∈Z)

1. $x \equiv x (\mathrm{mod}\ n)$ jika $x - x = (n)(0)$.
2. $x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$ maka $x - y = nq$. Dengan mengalikan -1 pada persamaan tersebut diperoleh $y - x = n(-q)$, $-q \in Z$ sehingga $y \equiv x (\mathrm{mod}\ n)$.
3. $x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$ dan $y \equiv z (\mathrm{mod}\ n)$ maka :

   $x - y = nq$ dan $y - z = nk$, $q, k \in Z$.

   dengan menjumlahkan kedua persamaan tersebut diperoleh

   $(x-y) + (y-z) = nq + nk$

   $x - z = n(q+k)$, $q+k \in Z$

   $x \equiv z (\mathrm{mod}\ n)$

Sesuai dengan relasi ekuivalen, klas ekuivalen untuk kongruen modulo n bentuk pembagian dari Z. Klas-klas ekuivalen merupakan himpunan bagian dari Z yang saling asing. Himpunan bagian tersebut disebut klas ekuivalen atau klas residu. Berbicara mengenai sisa pembagian, terlihat ada n klas residu modulo n yaitu:

$[0] = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \ldots\}$

$[2] = \{\ldots, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, \ldots\}$

.
.
.

$[n-1] = \{\ldots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \ldots\}$

sehingga klas-klas residu di atas dapat dituliskan dalam suatu himpunan sebagai berikut:

$Z_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$

Jadi himpunan klas residu modulo n sama dengan himpunan bilangan bulat modulo n.

Teorema 2.2.2

Jika $a \equiv b(\text{mod } n)$ dan x adalah bilangan bulat sebarang maka $a + x \equiv b + x(\text{mod } n)$ dan $ax \equiv bx(\text{mod } n)$.

Bukti :

Diambil $a \equiv b(\text{mod } n)$ dan $x \in Z$. Akan ditunjukkan bahwa $a + x \equiv b + x(\text{mod } n)$ sebagai berikut :

Karena $a \equiv b(\text{mod } n)$ maka $a-b=nq$, $q \in Z$. Persamaan tersebut akan sama dengan $(a+x) - (b+x)=nq$, $q \in Z$ sehingga terlihat bahwa $a+x \equiv b+x(\text{mod } n)$.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $ax \equiv bx(\text{mod } n)$ sebagai berikut :

Dari yang diketahui $a \equiv b(\text{mod } n)$ maka $a-b=nq$, $q \in Z$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan x didapat $(a-b)x=(nq)x$, $q, x \in Z$ selanjutnya menjadi $ax-bx=n(qx)$, $qx \in Z$. Dari persamaan terakhir terlihat bahwa $ax \equiv bx(\text{mod } n)$.

Teorema 2.2.3

Jika $a \equiv b(\text{mod } n)$ dan $c \equiv d(\text{mod } n)$ maka $a + c \equiv b + d(\text{mod } n)$ dan $ac \equiv bd(\text{mod } n)$.

Bukti :

Diambil $a \equiv b(\text{mod } n)$ maka $a-b = nq$, $q \in Z$. Mengalikan kedua ruas dengan c didapat $(a-b)c = (nq)c$, $q, c \in Z$ sehingga persamaannya menjadi $ac - bc = n(qc)$, $qc \in Z$. Diambil $c \equiv d(\text{mod } n)$ maka $c-d = nq$, $q \in Z$. Mengalikan kedua ruas dengan b didapat $(c-d)b = (nq)b$, $q, b \in Z$ sehingga persamaannya menjadi $bc-bd = n(qb)$,

$qb \in Z$. dari $ac-bc=n(qc)$ dan $bc-bd=n(qb)$ dijumlahkan menjadi $ac - bd=n(qc+qb)$, $qc, qb \in Z$ sehingga $ac-bd=nq(c+b)$. akhirnya didapat $ac \equiv bd \pmod n$.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $a + c \equiv b + d \pmod n$ yaitu dengan menjumlahkan persamaan $a - b = nq$, $q \in Z$ dan $c - d = nk$, $k \in Z$. Hasil yang didapat adalah $(a+c) - (b+d) = n(q+k)$, $q+ \in Z$. Jadi $a+c \equiv b+d \pmod n$.

Teorema 2.2.4

Jika $ax \equiv ay \pmod n$ dan $(a,n)=1$ maka $x \equiv y \pmod n$.

Bukti :

Diketahui $ax \equiv ay \pmod n$ serta a dan n relatif prima maka :

$ax \equiv ay \pmod n$ sehingga $ax-ay=nk$ dan dapat ditulis $n \mid (ax-ay)$. Dari $n \mid (ax-ay)$ menjadi $n \mid a(x-y)$ maka $n \mid (x-y)$. Akhirnya terlihat bahwa $x \equiv y \pmod n$.

Teorema ini hanya berlaku untuk a dan n pasangan relatif prima. Sebagai contoh $4.6 \equiv 4.21 \pmod{30}$ akan tetapi $6 \neq 21 \pmod{30}$ karena $(4, 30) \neq 1$ atau 4 dan 30 bukan pasangan relatif prima.

Teorema 2.2.5

Jika a dan n relatif prima, maka $ax \equiv b \pmod n$ mempunyai penyelesaian bilangan bulat x.

Bukti :

Jika a dan b relatif prima maka $(a,n)=1$, terdapat bilangan bulat s dan t sedemikian sehingga :

$1=as+nt$

$b=bas+bnt$

$a(sb)-b=n(-tb)$

$n \mid (a(sb)-b)$

$a(sb) \equiv b \pmod n$

Jadi $x=sb$ adalah penyelesaian untuk $ax \equiv b \pmod n$.

2.3. Homomorfisma Modular

Teorema 2.3.1(Teorema Algoritma Pembagian)

Diketahui bilangan bulat a dan b dengan b>0, maka terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r sehingga:

$a = bq + r,\ 0 \leq r < b.$

Teorema di atas, bilangan bulat q disebut pembagi dan r disebut sisa pembagian dari a oleh b.

Contoh 2.3.1

Diketahui bilangan bulat a = 357 dan b = 13. Tentukan q dan r !

Penyelesaian:

Dengan pembagian yang panjang diberikan:

$$
\begin{array}{r}
27 \\
13\overline{)357} \\
\underline{26} \\
97 \\
\underline{91} \\
6
\end{array}
$$

Jadi didapat q = 27 dan r = 6 dan jika dituliskan dalam a = bq + r menjadi 357 = (13)(27) + 6.

Definisi 2.3.1

Homomorfisma modular $\phi_m : Z[x_1, \ldots ,x_n] \rightarrow Z_m[x_1, \ldots, x_n]$ adalah homomorfisma yang didefinisikan untuk bilangan bulat $m \in Z$ yang memenuhi kondisi di bawah ini:

$\phi_m(x_i) = x_i , \forall i = 1, 2, \ldots, n$

$\phi_m(a) = r$

dengan $a = km + r$, untuk $0 \leq r < m$ dan $a, k, m \in Z$.

2.4. Matriks dan Operasi Matriks

Definisi 2.4.1

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari m bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan ini disebut entri dalam matriks.

Entri dalam matriks biasa ditulis dengan huruf kecil, sedang matriksnya dengan huruf besar. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut dan biasa dituliskan dengan m x n dengan m merupakan jumlah baris dan n jumlah kolom.

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom disebut matriks kuadrat berordo n (*square matrix of order n*) dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ berada pada diagonal utama dari matriks. Jika semua entri matriks kuadrat di bawah diagonal utama adalah nol dinamakan segitiga atas dan jika semua entri matriks kuadrat di atas diagonal utama adalah nol disebut segitiga bawah.

Definisi 2.4.2

Jika A adalah matriks m x r dan B adalah matriks r x n, maka hasil kali AB adalah matriks m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Definisi 2.4.3

Jika A sebarang matriks m x n, maka transpos A dinyatakan dengan A^t dan didefinisikan dengan matriks n x m yang kolom pertamanya adalah baris pertama matriks A, kolom keduanya adalah baris kedua matriks A, demikian juga kolom ketiga adalah baris ketiga matriks A dan seterusnya.

Definisi 2.4.4

Jika A adalah matriks kuadrat, dan dapat dicari matriks B sehingga AB = BA = I, maka A dapat dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A.

2.5. Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.5.1

Persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \ldots x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta riil.

Definisi 2.5.2

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \ldots x_n$ dinamakan sistem persamaan linier atau sistem linier.

Sistem persamaan linier dapat juga ditulis dalam bentuk AX=B, dengan

A=$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ dan B=$\begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berisi koefisien-koefisien

dari sistem persamaan linier dan X =$[x_1 \ldots x_n]^t$ matriks yang berisi peubah-peubah sistem persamaan linier. Jika pada matriks A disisipkan kolom tambahan dari matriks B maka disebut matriks yang diperbesar dan dituliskan $(A \mid B)$.

Sekarang jika b_i, i=1,2, ..., m adalah nol maka sistem persamaannya disebut sistem persamaan linier homogen, tetapi jika tidak semuanya nol sistem persamaannya disebut sistem persamaan linier non homogen.

Definisi 2.5.3

Pasangan berurutan $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dinamakan penyelesaian dari sistem persamaan linier AX=B jika memenuhi AS=B, dengan S matriks berukuran nx1 dengan entri $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

2.6. Determinan

Untuk setiap matriks kuadrat dapat diasosiasikan suatu bilangan riil yang disebut determinan dari matriks tersebut. Nilai dari bilangan ini akan menunjukkan apakah matriks yang bersangkutan singular atau tidak. Jika determinan suatu matriks nol maka disebut matriks singular dan jika determinan suatu matriks tidak sama dengan nol maka disebut matriks tak singular.

Misal A sebarang matriks, determinan dari matriks A sering ditulis sebagai det(A) atau dapat dituliskan dengan memberi garis-garis vertikal di samping matriks. Untuk menghitung determinan suatu matriks kuadrat yang berordo dua dan matriks kuadrat berordo tiga dapat menggunakan rumus di bawah ini.

(i). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(ii). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Selanjutnya untuk mencari determinan matriks kuadrat berordo lebih dari tiga dengan menggunakan definisi-definisi di bawah ini.

Definisi 2.6.1

Jika A=(a_{ij}) matriks kuadrat berordo n, maka minor entri a_{ij} didefinisikan menjadi determinan suatu matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j di coret dari matriks A.

Minor entri a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij}. Untuk mencari minor entri bisa dimulai dari baris atau dari kolom. Mencari minor entri dari baris pertama, dihilangkan baris pertama dan kolom pertama didapat minor entri a_{11}. Dihilangkan baris pertama dan kolom kedua didapat minor entri a_{12}, dan seterusnya. Begitu juga untuk mencari minor entri melalui kolom, dihilangkan kolom pertama dan baris pertama didapat minor entri a_{11}. Dihilangkan kolom pertama baris kedua didapat minor entri a_{21} dan seterusnya.

Definisi 2.6.1 mendefinisikan tentang minor entri a_{ij}. Sekarang diberikan definisi tentang kofaktor entri a_{ij}.

Definisi 2.6.2

Jika $A=(a_{ij})$ matriks kuadrat berordo n, maka kofaktor entri a_{ij} merupakan bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dan dinyatakan oleh c_{ij}.

Jadi minor entri dan kofaktor entri hanya berbeda dalam tanda, yaitu $c_{ij} = \pm M_{ij}$. Adapun matriks kofaktor-A dapat dituliskan sebagai kofaktor-A = (c_{ij}) dan transpos matriks kofaktor ini disebut adjoin A dan biasa ditulis adj(A).

Selanjutnya untuk mencari determinan matriks A yang berukuran nxn dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil kali yang dihasilkan ; yakni, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka:

$\det(A)=a_{1j}c_{1j}+ a_{2j}c_{2j} + \ldots +a_{nj}c_{nj}$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j) dan

$\det(A)=a_{i1}c_{i1}+ a_{i1}c_{i2} + \ldots +a_{in}c_{in}$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i).

Cara lain untuk mencari determinan yaitu dengan reduksi baris (kolom). Pertama dilakukan operasi elementer dengan eliminasi Gauss yang akan dibahas pada subbab 2.8, maka akan didapat segitiga atas. Kemudian determinan diperoleh dengan mengalikan entri – entri pada diagonal utama matriks tersebut.

Teorema 2.6.1

Jika A matriks yang mempunyai invers, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

Bukti :

Mula-mula perlihatkan bahwa A . adj(A)=det (A)I

Tinjaulah hasil kali A.adj(A)= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{j2} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

Entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A.adj(A) adalah $a_{i1}c_{j1}+a_{i2}c_{j2}+\ldots+a_{in}c_{jn}$. Jika i=j maka $a_{i1}c_{j1}+a_{i2}c_{j2}+\ldots+a_{in}c_{jn}$ adalah ekspansi kofaktor dari det(A) sepanjang baris ke-i dari A. Sebaliknya, jika $i \neq j$, maka koefisien-koefisien A dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris A yang berbeda, sehingga nilai $a_{i1}c_{j1}+a_{i2}c_{j2}+\ldots+a_{in}c_{jn}$ sama dengan nol. Maka

$$A.\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I$$

Karena A dapat dibalik maka det (A) $\neq$ 0, selanjutnya A.adj(A) = det (A)I dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{1}{\det(A)}[A.\text{adj}(A)] = I \quad \text{atau} \quad A\left[\frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}\right] = I.$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan A^{-1} didapat $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$.

2.7. Aturan Cramer

Teorema 2.7.1

Jika A adalah matriks nxn yang mempunyai invers, maka untuk setiap matriks B yang berukuran nx1, sistem persamaan AX = B mempunyai persis satu penyelesaian, yakni $X = A^{-1}B$.

Teorema 2.7.2

Jika $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ atau AX=B adalah sistem linier sehingga det(A)≠0, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal sebagai berikut :

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ X_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \ldots,\ X_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana $A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri dalam matriks $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Bukti :

Jika det(A)≠0, maka A mempunyai invers dan menurut teorema 2.7.1, $X=A^{-1}B$ adalah penyelesaian tunggal untuk AX=B, sehingga menurut teorema 2.6.1 didapatkan

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)B=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1c_{11}+b_2c_{21}+\ldots+b_nc_{n1} \\ b_1c_{12}+b_2c_{22}+\ldots+b_nc_{n2} \\ \vdots \\ b_1c_{1n}+b_2c_{2n}+\ldots+b_nc_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke-j dari x adalah :

$$x_j=\frac{b_1c_{1j}+b_2c_{2j}+\ldots+b_nc_{nj}}{\det(A)} \qquad 2.7.2.1$$

Karena A_j berbeda dengan A hanya dalam kolom ke-j, maka kofaktor dari entri-entri b_1, b_2, ..., b_n dalam A_j adalah sama seperti kofaktor dari entri-entri yang bersesuaian dalam kolom ke-j dari A. Ekspansi kofaktor $\det(A_j)$ sepanjang kolom ke-j adalah :

$$\det(A_j)= b_1c_{1j}+b_2c_{2j}+\ldots+b_nc_{nj}$$

Dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam 2.7.2.1 maka akan memberikan

$$x_j=\frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Dari teorema di atas telah jelas bahwa sistem persamaan linier mempunyai penyelesaian tunggal jika sistem persamaan linier tersebut dengan $\det(A)\neq 0$. Jika $\det(A)=0$, $\det(A_1)\neq 0,\ldots$, $\det(A_n)\neq 0$ maka sistemnya tidak mempunyai penyelesaian Tetapi jika $\det(A)=\det(A_1)=\ldots=\det(A_n)=0$ sistemnya mempunyai takterhingga banyaknya penyelesaian. Sistem persamaan linier pasti mempunyai determinan nol jika pada sistem tersebut terdapat suatu baris(kolom) yang merupakan kelipatan dari baris(kolom) lainnya.

Berikut akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier dengan aturan Cramer.

Contoh 2.7.1

Diketahui sistem persamaan linier non homogen sebagai berikut:

$$19x_1 + 21x_2 = 23 \qquad \text{....*}$$

$$23x_1 + 25x_2 = 27 \qquad \text{....*}$$

Tentukan penyelesaian dari sistem tersebut dengan aturan Cramer!

Penyelesaian:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \text{ sehingga } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ \textit{dan}\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{vmatrix} = 475 - 483 = -8$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 23 & 21 \\ 27 & 25 \end{vmatrix} = 575 - 567 = 8$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 23 & 27 \end{vmatrix} = 513 - 529 = -16$$

sehingga $x_1 = 8/(-8) = -1$ dan $x_2 = -16/(-8) = 2$. Jadi himpunan penyelesaian untuk sistem persamaan linier di atas adalah $(x_1, x_2) = (-1, 2)$.

2.8. Eliminasi Gauss

Penyelesaian sistem persamaan linier dengan eliminasi Gauss didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga sistem persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan mereduksi baris yang terdapat pada sistem tersebut.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan eliminasi Gauss digunakan tiga operasi baris elementer, yaitu :

1. Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta yang tidak sama dengan nol.
2. Menukar dua baris tersebut.
3. Menambahkan perkalian dari satu baris pada baris yang lainnya.

Untuk menggambarkan metode eliminasi Gauss, pertama diberikan kasus tiga persamaan dengan tiga variabel sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad 2.8.1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad 2.8.2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad 2.8.3$$

Paling sedikit satu dari a_{11}, a_{21} dan a_{31} tidak nol; bila $a_{11} = 0$, persamaan disusun kembali sehingga koefisien dari x_1 tidak nol. Dengan menukar dua baris dalam sistem persamaan, sistem tetap mempunyai penyelesaian yang sama.

Kemudian didefinisikan faktor pengali:

$$m_2 = a_{21}/a_{11}$$

Mengalikan persamaan 2.8.1 dengan m_2 dan dikurangkan dari persamaan 2.8.2, didapat hasil:

$$(a_{21} - m_2a_{11})x_1 + (a_{22}-m_2a_{12})x_2 + (a_{23} - m_2a_{13})x_3 = b_2 - m_2b_1 \qquad 2.8.4$$

Tetapi $a_{21} - m_2a_{11} = a_{21} - a_{21}a_{11}/a_{11} = 0$ sehingga x_1 dihilangkan dari persamaan 2.8.2. Sekarang didefinisikan:

$$a_{22}' = a_{22} - m_2a_{12}$$

$$a_{23}' = a_{23} - m_2a_{13}$$

$$b_2' = b_2 - m_2b_1$$

maka 2.8.4 menjadi:

$$a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 = b_2' \qquad 2.8.5$$

Mengganti persamaan 2.8.2 dengan 2.8.5. Seperti sebelumnya didefinisikan faktor pengali untuk persamaan 2.8.3 yaitu:

$m_3 = a_{31}/a_{11}$

Mengalikan persamaan 2.8.1 dengan m_3 dan dikurangkan dari persamaan 2.8.3. Koefisien x_1 hilang lagi. Hasilnya adalah:

$$a_{32}' x_2 + a_{33}' x_3 = b_3' \qquad 2.8.6$$

dengan: $a_{32}' = a_{32} - m_3 a_{12}$

$a_{33}' = a_{33} - m_3 a_{13}$

$b_3' = b_3 - m_3 b_1$

Menggunakan 2.8.6 untuk mengganti 2.8.3, tiga persamaan yang dihasilkan dengan tiga variabel adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad 2.8.1$$

$$a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 = b_2' \qquad 2.8.5$$

$$a_{32}' x_2 + a_{33}' x_3 = b_3' \qquad 2.8.6$$

Ini sama dengan persamaan semula, dengan keuntungan x_1 hanya muncul pada persamaan 2..8.1. Kedua persamaan terakhir adalah dua persamaan dengan dua variabel. Bila kedua persamaan terakhir dapat diselesaikan akan didapat x_2 dan x_3, hasilnya disubstitusikan ke persamaan 2.8.1 untuk mencari x_1.

Sekarang menghilangkan x_2 dari salah satu kedua persamaan terakhir. Bila $a_{22}' = 0$, tukar kedua persamaan terakhir (bila $a_{22}'=0$ dan $a_{32}'=0$ persamaan adalah singular dan tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai tak hingga penyelesaian).

$m_3' = a_{32}'/a_{22}'$

Mengalikan persamaan 2.8.5 dengan m_3' dan dikurangkan dari persamaan 2.8.6.. Hasilnya adalah:

$$(a_{32}' - m_3' a_{22}')x_2 + (a_{33}\text{-}m_3' a_{23}')x_3 = b_3 - m_3' b_2'$$

Tetapi $a_{32}' - m_3' a_{22}' = 0$ dan bila ditetapkan $a_{33}'' = a_{33}' - m_3' a_{23}'$ dan $b_3'' = b_3' - m_3' b_2'$ didapatkan:

$$a_{33}'' x_3 = b_{33}''$$

Ini mengganti 2.8.6, sehingga persamaan terakhir menjadi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad 2.8.1$$

$$a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 = b_2' \qquad 2.8.5$$

$$a_{33}'' x_3 = b_{33}'' \qquad 2.8.7$$

Sistem persamaan ini disebut segitiga. Dari persamaan 2.8.7 diperoleh x_3, dan dengan mensubstitusikan hasilnya ke persamaan 2.8.5 diperoleh x_2 selanjutnya mensubstitusikan ke persamaan 2.8.1 diperoleh x_1. Proses ini disebut substitusi kembali dan diberikan oleh:

$$x_3 = b_3''/a_{33}''$$

$$x_2 = (b_2' - a_{23}' x_3)/a_{22}'$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

Diketahui di depan bahwa $a_{11} \neq 0$ dan $a_{22}' \neq 0$. Jika $a_{33}'' = 0$ ini berarti sistem persamaannya singular.

Contoh 2.8.1

Diketahui sistem persamaan linier non homogen sebagai berikut:

$$19x_1 + 21x_2 = 23 \qquad \ldots 1$$

$$23x_1 + 25x_2 = 27 \qquad \ldots 2$$

Selesaikan sistem persamaan di atas dengan eliminasi Gauss!

Penyelesaian:

Akan didefinisikan faktor pengali yaitu:

$m_1 = 23/19$

Mengalikan persamaan 1 dengan m_1 dan dikurangkan dari persamaan 2, didapat hasil:

$$(23 - (23/19)19)x_1 + (25-(23/19)21)x_2 = 27 - (23/19)23$$

$$((475-483)/19)x_2 = (513-529)/19$$

$$(-8/19)x_2 = -16/19 \qquad \text{....3}$$

sehingga didapat sistem persamaan linier baru yaitu:

$19x_1 + 21x_2 = 23$

$(-8/19)x_2 = -16/19$

Dari persamaan 3 disederhanakan menjadi

$x_2 = 2$

dan hasil ini disubstitusikan ke persamaan 1 diperoleh:

$19x_1 + 42 = 23$

$19x_1 = -19$

$x_1 = -1$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $(x_1, x_2) = (-1, 2)$. Dan hasil ini sama dengan hasil yang diperoleh pada contoh 2.7.1 yang sistem persamaannya diselesaikan dengan aturan Cramer.